Aplicación de los Polinomios de Chebyshev al Análisis de Redes Eléctricas

M.I. Isidro Ignacio Lázaro Castillo   Dr. Juan Anzurez Marin   Ing. Garibaldi Pineda García

División de Estudios de Posgrado

Facultad de Ingeniería Eléctrica, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Av. Fco. J Mujica s/n., Col. Felicitas del Río, Morelia, Mich. C.P. 58030

E-mail: ilazaro@ieee-sco.org, j.anzurez@ieee.org

Resumen

Se presenta un método alternativo basado en Polinomios de Chebyshev para análisis de redes eléctricas cuya dinámica se puede modelar por ecuaciones de estado. La metodología toma las ventajas de las propiedades operacionales disponibles para la mayoría de las series ortogonales, como son, matriz de integración, derivación, producto y de coeficientes. Un hecho importante de esta aproximación es la obtención de una expresión analítica para el análisis del estado transitorio. Para mostrar la validación del método se usa una red eléctrica. Los resultados obtenidos son muy satisfactorios.

Palabras clave

Cálculo operacional, Polinomios de Chebyshev, Series Ortogonales, Análisis transitorio.

Abstract

An alternative method based on Chebyshev Polinomials for analysis of electric networks whose dynamics can be modeled by state equations is presented. The methodology takes advantages of the operational properties available to most orthogonal series expression, i.e. integration, differentiation, product and coefficient matrices. An important feature of this approach is that an analytical expression for the transient state analysis is provided. A network is given to illustrate the validity of the method. Very satisfactory results are obtained.

Key Words

Operational Calculus, Chebyshev Polynomials, Orthogonal Series, Transient Analysis.

Introducción

En los últimos años, la aproximación de funciones por medio de series ortogonales ha incrementado su importancia en el estudio de sistemas, identificación de parámetros y control óptimo [1],[2], [3] y [4].

El estudio de series ortogonales para la solución de ecuaciones diferenciales es un tema obligado en la currícula de la mayoría de las ingenierías. Sin embargo, la aplicación no está limitada al área de la educación. Las series ortogonales y sus propiedades ortogonales permiten generar marcos matemáticos para el análisis de sistemas lineales invariantes y periódicos. Un ejemplo concreto de este tipo de análisis es practicado en los cursos convencionales de circuitos. El análisis fasorial y armónico es común en la ingeniería de sistemas de potencia. En este análisis el uso de las series de Fourier es la alternativa de preferencia, la cual puede explicarse de varias formas. Primero, los algoritmos numéricos para el cálculo de la transformada rápida de Fourier están disponibles en cualquier lenguaje de programación. Segundo, las formas de onda esperadas en un circuito o red eléctrica son periódicas y cercanamente sinusoidales.

En este artículo la matriz operacional de integración, la matriz producto y la matriz de coeficientes se emplean para desarrollar una técnica de análisis de Sistemas Lineales Variantes e Invariantes en el tiempo (SLVT y SLIT), usando modelos en el espacio de estado de los sistema. La idea básica de esta técnica es convertir la ecuación diferencial en una ecuación integral vía integración múltiple. Subsecuentemente, las diversas señales involucradas en la ecuación integral son aproximadas por funciones base truncadas. Finalmente, la ecuación integral es convertida a una ecuación algebraica introduciendo una matriz de integración de las funciones base. Los resultados obtenidos mediante esta técnica son comparados con los calculados a través de un método de integración (ODE45), todos los algoritmos fueron desarrollados bajo la plataforma de MATLAB.

Cálculo Operacional Usando Polinomios de Chebyshev

En 1983 Liu y Shih derivaron las matrices operacionales de integración hacia atrás y hacia delante, así como la matriz producto para los polinomios de Chebyshev del primer tipo y aplicaron dichas matrices al análisis y control óptimo de sistemas lineales variantes en el tiempo [4]. Este mismo año Paraskevopoulos usa las series de Chebyshev para resolver problemas de análisis e identificación. En 1984

Hwang y Shih presentan la idea de usar polinomios de Chebyshev discretos para la reducción de sistemas discretos lineales invariantes en el tiempo descritos por la transformada Z. Horng y Chou, en 1985, presentan el uso de los polinomios de Chebyshev aplicado al control óptimo y al diseño de observadores.

Usando las propiedades operacionales de integración y producto de los polinomios de Chebyshev de primer tipo, Liu y Shih estudiaron el análisis y la estimación de parámetros de sistemas bilineales [5],[6], [7], [8].

Propiedades de los Polinomios Ortogonales de Chebyshev del Primer Tipo.

Los polinomios de Chebyshev son un conjunto de funciones ortogonales respecto a una función de peso dada por

$$w(t)=\frac{t_f-t_0}{2\sqrt{(t-t_0)(t_f-t)}} \tag{1}$$

donde t_0 es el tiempo inicial de estudio y t_f es el tiempo final. Estos pueden definirse por medio de las siguientes ecuaciones [4].

$$T_0(t)=1 \tag{2}$$

$$T_1(t)=\frac{2(t-t_0)}{t_f-t_0}-1 \tag{3}$$

$$T_{r+1}(t)=2\left[\frac{2(t-t_0)}{t_f-t_0}-1\right]T_r(t)-T_{r-1}(t) \tag{4}$$

Cualquier función $f(t)$ puede ser aproximada por un conjunto de polinomios $\{T_0(t), T_1(t), \ldots, T_m(t)\}$ en el intervalo $[t_0, t_f]$, si la función $f(t)$ es absolutamente integrable en el intervalo antes mencionado.
Así,

$$f(t)=f_0T_0(t)+f_1T_1(t)+f_2T_2(t)+\cdots \tag{5}$$

ó

$$f(t)=\sum_{r=0}^{\infty} f_rT_r(t) \tag{6}$$

donde,

$$f_r=\frac{1}{\gamma_r}\int_{t_0}^{t_f} w(t)f(t)T(t)\,dt \tag{7}$$

$$\gamma_r=\begin{cases}\pi, & r=0\\ \dfrac{\pi}{2}, & r\neq 0\end{cases} \tag{8}$$

La figura 1 muestra los primeros cuatro polinomios definidos para un periodo comprendido entre [0,1].

Matriz Operacional de Integración.

Las propiedades operacionales de las series ortogonales pueden ser escritas en términos de la matriz de integración, en donde el principal concepto es el hecho de que la integral del vector base puede ser expresada en términos de una serie ortogonal, esta puede definirse como (9).

La matriz operacional de integración P es una matriz cuadrada que se obtiene al integrar cada elemento del vector base y aproximar el resultado usando las funciones base originales.

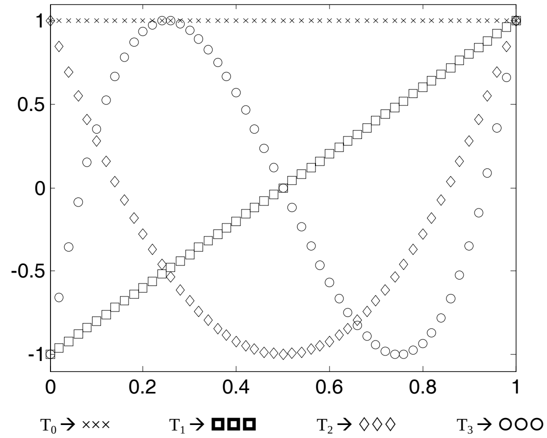

Figura 1. Polinomios de Chebyshev

La tabla 1 contiene los primeros cuatro polinomios así como sus integrales, usando un tiempo inicial de cero y el tiempo final es uno.

$$\int \mathrm{T}(t)dt \approx \mathrm{PT}(t) \tag{9}$$

1	$\rightarrow\int\rightarrow$	t
$2t-1$		t^2-t
$8t^2-8t+1$		$\frac{8}{3}t^3-4t^2+t$
$32t^3-48t^2+18t-1$		$8t^4-16t^3+9t^2-t$

Tabla 1. Integrales de las funciones base.

Si aproximamos las ecuaciones resultantes con polinomios de Chebyshev se obtienen los siguientes coeficientes

$\int T_0$	0.500	0.500	0.000	0.000
$\int T_1$	-0.125	0.000	0.125	0.000
$\int T_2$	-0.166	-0.250	0.000	0.083
$\int T_3$	0.062	0.000	-0.125	0.000

Tabla 2. Coeficientes de las integrales de las funciones base.

La ecuación (10) muestra la forma general para el caso de polinomios de Chebyshev de la matriz de operacional de integración de orden *m*.

$$\mathrm{P}=\frac{t_f-t_0}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)(m-3)} & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2(m-3)} & 0 & \frac{1}{2(m-1)}\\ \frac{(-1)^{m}}{(m)(m-2)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2(m-2)} & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Matriz Producto y de Coeficientes.

Por definición, el producto del vector de las series ortogonales base y su transpuesta es denominado matriz producto $\Pi(t)$, esto es

$$\Pi(t) = \mathrm{T}(t)\mathrm{T}^{\mathsf{T}}(t) \tag{11}$$

La forma general de dicha matriz se muestra en la siguiente ecuación.

$$\Pi(t) = \begin{bmatrix} T_0 & T_1 & T_2 & \cdots & T_{m-1} \\ T_1 & \dfrac{[T_0+T_2]}{2} & \dfrac{[T_1+T_3]}{2} & \cdots & \dfrac{T_{m-2}}{2} \\ T_2 & \dfrac{[T_1+T_3]}{2} & \dfrac{[T_0+T_4]}{2} & \cdots & \dfrac{T_{m-3}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m-1} & \dfrac{T_{m-2}}{2} & \dfrac{T_{m-3}}{2} & \cdots & \dfrac{T_0}{2} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Si consideramos el producto $\Pi(t)\mathrm{c}$, siendo c un vector de coeficientes para aproximar una función, existe una matriz [C] tal que

$$\Pi(t)\mathrm{c} = [\mathrm{C}]\mathrm{T}(t) \tag{13}$$

Para el caso de ocho polinomios base, la matriz de coeficientes toma la forma

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ \frac{c_1}{2} & c_0+\frac{c_2}{2} & \frac{c_1+c_3}{2} & \frac{c_2+c_4}{2} & \frac{c_3+c_5}{2} & \frac{c_4+c_6}{2} & \frac{c_5+c_7}{2} & \frac{c_6}{2} \\ \frac{c_2}{2} & \frac{c_1+c_3}{2} & c_0+\frac{c_4}{2} & \frac{c_1+c_5}{2} & \frac{c_2+c_6}{2} & \frac{c_3+c_7}{2} & \frac{c_4}{2} & \frac{c_5}{2} \\ \frac{c_3}{2} & \frac{c_2+c_4}{2} & \frac{c_1+c_5}{2} & c_0+\frac{c_6}{2} & \frac{c_1+c_7}{2} & \frac{c_2}{2} & \frac{c_3}{2} & \frac{c_4}{2} \\ \frac{c_4}{2} & \frac{c_3+c_5}{2} & \frac{c_2+c_6}{2} & \frac{c_1+c_7}{2} & c_0 & \frac{c_1}{2} & \frac{c_2}{2} & \frac{c_3}{2} \\ \frac{c_5}{2} & \frac{c_4+c_6}{2} & \frac{c_3+c_7}{2} & \frac{c_2}{2} & \frac{c_1}{2} & c_0 & \frac{c_1}{2} & \frac{c_2}{2} \\ \frac{c_6}{2} & \frac{c_5+c_7}{2} & \frac{c_4}{2} & \frac{c_6}{2} & \frac{c_2}{2} & \frac{c_1}{2} & c_0 & \frac{c_1}{2} \\ \frac{c_7}{2} & \frac{c_6}{2} & \frac{c_5}{2} & \frac{c_4}{2} & \frac{c_3}{2} & \frac{c_2}{2} & \frac{c_1}{2} & c_0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

De ahí se puede ver que la ecuación (15) es la forma general de la matriz de coeficientes

$$[\mathrm{C}] = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{m-1} \\ \dfrac{c_1}{2} & c_0+\dfrac{c_2}{2} & \dfrac{[c_1+c_3]}{2} & \cdots & \dfrac{c_{m-2}}{2} \\ \dfrac{c_2}{2} & \dfrac{[c_1+c_3]}{2} & c_0+\dfrac{c_4}{2} & \cdots & \dfrac{c_{m-3}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{c_{m-1}}{2} & \dfrac{c_{m-2}}{2} & \dfrac{c_{m-3}}{2} & \cdots & c_0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Dada la relativa complejidad para "armar" esta matriz, se descompone en tres matrices independientes y un medio de la suma de estas da como resultado la matriz de coeficientes. A continuación se presentan dichas matrices, nombradas E, F y G para el caso en el que se utilizan ocho polinomios para la aproximación.

$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & & \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & & & \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & & & & \\ c_5 & c_6 & c_7 & & & & & \\ c_6 & c_7 & & & & & & \\ c_7 & & & & & & & \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\mathrm{F} = \begin{bmatrix} & & & & & & & \\ & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 \\ & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 \\ & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\mathrm{G} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ & c_0 & & & & & & \\ & & c_0 & & & & & \\ & & & c_0 & & & & \\ & & & & c_0 & & & \\ & & & & & c_0 & & \\ & & & & & & c_0 & \\ & & & & & & & c_0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Y así,

$$[\mathrm{C}] = \frac{\mathrm{E}+\mathrm{F}+\mathrm{G}}{2} \tag{19}$$

Solución de Ecuaciones de Estado

Desde el punto de vista del espacio de estado, cualquier ecuación diferencial de orden n puede ser convertida en un conjunto de ecuaciones de estado, estas a su vez pueden ser transformadas en un conjunto de ecuaciones algebraicas al aplicar los conceptos del cálculo operacional, en esta sección se describe la metodología para resolver dichas ecuaciones empleando la matriz de integración [9].

Suponiendo el caso lineal más general a solucionar, es decir, un sistema lineal variante en el tiempo (SLVT)

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{20}$$

donde $\boldsymbol{A}(t)$ es una matriz de $n \times n$, $\boldsymbol{x}(t)$ es un vector de $n \times 1$, $\boldsymbol{B}(t)$ es una matriz de $n \times q$, y $\boldsymbol{u}(t)$ un vector de q renglones.

La aproximación de cada uno de sus elementos usando m polinomios de Chebyshev, representadas en forma matricial, serán

$$x_i(t) \approx \mathrm{x}_i^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t) \quad (21)$$

$$u_i(t) \approx \mathrm{u}_i^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t) \quad (22)$$

$$A_{ij}(t) \approx \mathrm{A}_{ij}^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t) \quad (23)$$

$$B_{ij}(t) \approx \mathrm{B}_{ij}^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t) \quad (24)$$

donde x_i, u_i, A_{ij} y B_{ij} son vectores de m coeficientes de Chebyshev con forma general $\mathrm{F}^{\mathsf{T}} = \left[f_0 \quad f_1 \quad \cdots \quad f_{m-1} \right]$.

Entonces el producto $\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$ será

$$\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11}^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t)\mathrm{x}_1^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t) + \cdots + \mathrm{A}_{1n}^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t)\mathrm{x}_n^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t) \\ \mathrm{A}_{21}^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t)\mathrm{x}_1^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t) + \cdots + \mathrm{A}_{2n}^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t)\mathrm{x}_n^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t) \\ \vdots \\ \mathrm{A}_{n1}^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t)\mathrm{x}_1^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t) + \cdots + \mathrm{A}_{nn}^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t)\mathrm{x}_n^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t) \end{bmatrix} \quad (25)$$

Debido a que cada producto $\mathrm{A}_{ij}{}^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t)\mathrm{x}_j{}^{\mathsf{T}}(t)\mathrm{T}(t)$ da como resultado un valor escalar podemos reacomodar la expresión para tener

$$\mathrm{A}_{ij}^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t)\mathrm{x}_j^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t) = \mathrm{x}_j^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t)\mathrm{A}_{ij}^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t) \quad (26)$$

y aplicamos la transpuesta al termino $\mathrm{A}_{ij}{}^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t)$

$$\mathrm{A}_{ij}^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t)\mathrm{x}_j^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t) = \mathrm{x}_j^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t)\mathrm{T}^{\mathsf{T}}(t)\mathrm{A}_{ij} \quad (27)$$

usando la ecuación (13) de matriz de coeficientes

$$\mathrm{A}_{ij}^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t)\mathrm{x}_j^{\mathsf{T}}\mathrm{T}(t) = \mathrm{x}_j^{\mathsf{T}}\left[\mathsf{A}_{ij}\right]\mathrm{T}(t) \quad (28)$$

donde $[\mathsf{A}_{ij}]$ es la matriz de coeficientes del elemento $A_{ij}(t)$ de la matriz $\boldsymbol{A}(t)$.

Tomando en cuenta lo anterior podemos escribir el producto $A(t)x(t)$ como

$$\left[\mathrm{x}_1^{\mathsf{T}} \quad \cdots \quad \mathrm{x}_n^{\mathsf{T}}\right] \begin{bmatrix} [\mathrm{A}_{11}] & [\mathrm{A}_{12}] & \cdots & [\mathrm{A}_{1n}] \\ [\mathrm{A}_{21}] & [\mathrm{A}_{22}] & \cdots & [\mathrm{A}_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\mathrm{A}_{n1}] & [\mathrm{A}_{n2}] & \cdots & [\mathrm{A}_{nn}] \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \mathrm{T}(t) \quad (29)$$

o bien,

$$\left[A(t)\,x(t)\right]^{\mathsf{T}} = \mathbb{XAT}(t) \quad (30)$$

donde

$$\mathbb{T}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{T}(t) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{T}(t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

Similarmente el producto $B(t)u(t)$ puede ser aproximado como

$$\left[\mathrm{u}_1^{\mathsf{T}} \quad \cdots \quad \mathrm{u}_q^{\mathsf{T}}\right] \begin{bmatrix} [\mathrm{B}_{11}] & [\mathrm{B}_{12}] & \cdots & [\mathrm{B}_{1q}] \\ [\mathrm{B}_{21}] & [\mathrm{B}_{22}] & \cdots & [\mathrm{B}_{2q}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\mathrm{B}_{n1}] & [\mathrm{B}_{n2}] & \cdots & [\mathrm{B}_{nq}] \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \mathrm{T}(t) \quad (32)$$

es decir,

$$\left[B(t)\,u(t)\right]^{\mathsf{T}} = \mathbb{UBT}(t) \quad (33)$$

Si aplicamos la transpuesta a la ecuación del sistema (20) y sustituimos (30) y (33) en ella tendremos

$$\dot{\mathbb{X}}\,\mathbb{T}(t) = \mathbb{XAT}(t) + \mathbb{UBT}(t) \quad (34)$$

Integramos la ecuación anterior

$$\mathbb{XT}(t) - \mathbb{X}_0\mathbb{T}(t) = \int_{t_i}^{t_f} \left(\mathbb{XAT}(t) + \mathbb{UBT}(t)\right)dt \quad (35)$$

como $\mathbb{X}$, $\mathbb{A}$, $\mathbb{U}$ y $\mathbb{B}$ son constantes

$$\mathbb{XT}(t) - \mathbb{X}_0\mathbb{T}(t) = \mathbb{XA}\int_{t_i}^{t_f} \left(\mathbb{T}(t)\right)dt + \mathbb{UB}\int_{t_i}^{t_f} \left(\mathbb{T}(t)\right)dt \quad (36)$$

usando la matriz operacional de integración

$$\mathbb{XT}(t) - \mathbb{X}_0\mathbb{T}(t) = \mathbb{XAPT}(t) + \mathbb{UBPT}(t) \quad (37)$$

donde

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{P} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{P} \end{bmatrix} \quad (38)$$

y $\mathbb{X}_0$ es un vector de coeficientes que representa la aproximación de las condiciones iniciales del sistema.

Si eliminamos las funciones base de ambos lados de la ecuación (37) así tendremos

$$\mathbb{X} - \mathbb{X}_0 = \mathbb{XAP} + \mathbb{UBP} \quad (39)$$

para encontrar la solución aproximada al sistema despejamos $\mathbb{X}$ de la ecuación anterior (39).

$$\mathbb{X} - \mathbb{XAP} = \mathbb{UBP} + \mathbb{X}_0 \quad (40)$$

$$\mathbb{X}\left(\mathbb{I} - \mathbb{AP}\right) = \mathbb{UBP} + \mathbb{X}_0 \quad (41)$$

$$\mathbb{X} = \left(\mathbb{UBP} + \mathbb{X}_0\right)\left(\mathbb{I} - \mathbb{AP}\right)^{-1} \quad (42)$$

donde $\mathbb{I}$ es una matriz identidad de orden m×n.

Cabe señalar que esta misma expresión se aplica para el caso invariante, en donde la única diferencia estriba en la simplificación del cálculo de las matrices de coeficientes de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, pues estas vienen dadas por,

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11}I & a_{12}I & \cdots & a_{1n}I \\ a_{21}I & a_{22}I & \cdots & a_{2n}I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}I & a_{n2}I & \cdots & a_{nn}I \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \quad (43)$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} b_{11}I & b_{12}I & \cdots & b_{1q}I \\ b_{21}I & b_{22}I & \cdots & b_{2q}I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}I & b_{n2}I & \cdots & b_{nq}I \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \quad (44)$$

Resultados y Discusión

Caso de Estudio: Red Invariante en el Tiempo con Entradas no Sinusoidal

Como caso de estudio, se considera una red eléctrica invariante en el tiempo como la mostrada en la figura 2, a la cual se aplica una entrada sinusoidal distorsionada $V_s(t) = sen(t) + 0.1sen(3t) + 0.2sin(5t)$ [10], [11].

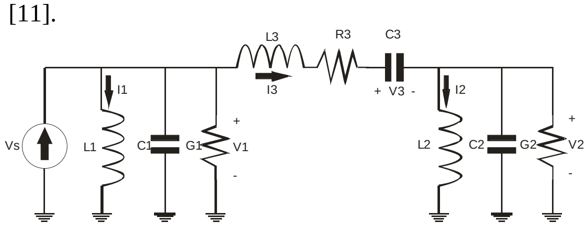

Figura 2. Diagrama del circuito de sexto orden

Su modelo descrito en variables de estado esta dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{G_1}{C_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & -\frac{G_2}{C_2} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \\ \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_3} & -\frac{1}{L_3} & -\frac{1}{L_3} & 0 & 0 & -\frac{R_3}{L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{i_0}{C_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \qquad (45)$$

Si consideramos que cada elemento del circuito tiene un valor unitario, entonces el sistema de ecuaciones (45) se transforma en:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \qquad (46)$$

Para realizar el análisis del circuito se consideraron las condiciones iniciales expresadas en (46).

$$x_0 = \begin{bmatrix} -0.0434 & 0.0335 & 0.03 & 0.04 & 0.05 & 0.06 \end{bmatrix}^T \qquad (0.45)$$

La Figura 3 muestra el resultado del análisis utilizando dieciséis términos, la variable corresponde al voltaje (v_1) en el capacitor (C_1). Se puede observar que la solución presenta algunos errores apreciables, sin embargo, estos se pueden reducir al aumentar el número de términos de los polinomios de Chebyshev.

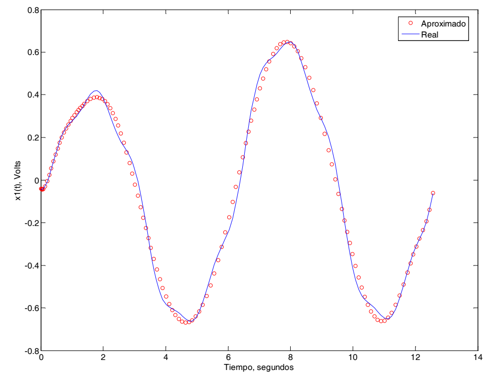

Figura 3 Solución de x_1 simulada con 16 polinomios

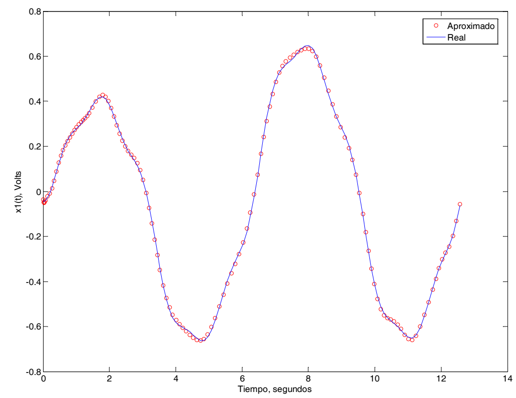

Figura 4 Solución de x_1 simulada con 32 polinomios

Ambas gráficas muestran la comparación de la solución obtenida con respecto a la obtenida a través de un método de integración numérica (ODE45), las simulaciones fueron realizadas en Matlab ®.

Por otro lado, el uso de las series ortogonales tales como los polinomios de Chebyshev, permite analizar redes eléctricas con elementos variantes en el tiempo sin necesidad de modificar la ecuación (42), la única diferencia con la caso de estudio mostrado está en cálculo de las matrices de coeficientes de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, en las cuales se requiere calcular la matriz de coeficientes de cada elemento que sea variante en el tiempo, esto toma relevancia debido a que actualmente las redes eléctricas incluyen dispositivos de electrónica de potencia, mismo que se pueden modelar como sistemas periódicos, por lo tanto, se puede aplicar la herramienta mostrada para el análisis transitorio de este tipo de redes [9].

Conclusiones

En este artículo se presenta una técnica basada en la matriz de integración del cálculo operacional, para analizar sistemas variantes e invariantes en el tiempo en el marco del dominio de la frecuencia. Como un caso particular de una serie ortogonal, en este artículo se presentan algunas propiedades útiles de los polinomios de Chebyshev. Así como la expresión general de las matrices de integración y de coeficientes. La aplicación de este método es ilustrado a través de un caso de estudio que consisten de una red invariante en el tiempo ante entrada no sinusoidal. De la comparación realizada se concluye que la técnica es adecuada para realizar análisis generales o análisis transitorios. El error producido por la aplicación de la técnica se reduce al incrementar el número de términos de la serie, a pesar de que las matrices operacionales llegan a tener grandes dimensiones, su distribución es dispersa, por lo que hay lugar a optimizaciones para minimizar el tiempo computacional requerido.

Referencias

[1] Chen C. F., Tsay Y. T. (1977), "Walsh Operational Matrices for Fractional Calculus and their Application to Distributed Systems", Journal of the Franklin Institute, Vol. 503, No. 3,pp. 267-284.

[2] Yang C. Y., Chen C. K. (1994), "Analysis and Optimal Control of Time-Varying Systems via Fourier". International Journal of Systems Science, Vol.25, No.11, pp. 1663-1678.

[3] Rico J. J. Rico, Acha E. (1998), "Analysis of Linear Time-Varying Systems Via Hartley Series", Int. Journal of Systems Science.

[4] Datta K. B., Mohan B. M. (1995), *Orthogonal Functions in Systems and Control, Advanced Series in Computer and Electrical Engineering*, Vol. 9. World Scientific Publishing Company, pp. 25-89.

[5] Chou J. H., Horng I. R (1983), "Double-shifted Chebyshev Series for Convolution Integral and Integral Equations", International Journal of Control, Vol. 38, No. 5.

[7] Liu Ch., Shih Y. (1983), "Analysis and Optimal Control of Time Varying Systems via Chebyshev Polynomials", International Journal of Control, pp. 1003-1012, Vol. 38, No. 5.

[8] Deshmukh V., Butcher E. (2003), "Optimal Control of Parametrically Excited Linear Delay Differential Systems via Chebyshev Polynomials", *IEEE Proceedings of the American Control Conference*, June 2003.

[9] Lázaro I. I., Pineda G, Espinoza E., Zavala S. (2008), "Analysis of Time Varying Power Systems Loads Via Chebyshev Polinomials", *Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference*, CERMA 2008, pp. 332-337.

[10] Golovin E. D., Syoukach O. V. (2003), "Usage of Orthogonal Polynomials at Calculation of Transfer Processes in Electric Circuits with Variable Parametres using Differential Transformations", *4th Siberian Russian Workshop and Tutorials*, EDM 2003, Section II, 1-4 July, Erlagol.

[11] DeCarlo A. R.(1995), *Linear Circuit Analysis*, Prentice Hall.